第 39 講　論証，証明

1　x，y が実数であるとき，次の文中の空欄に当てはまるものを，下の 1，2，3，4 から 1 つ選べ．

(i)「$x+y>0$ かつ $xy>0$」は，「$x>0$ かつ $y>0$」であるための ア ．

(ii)「$x+y>2$ または $x+y<-2$」は，「$x>1$ かつ $y>1$」であるための イ ．

(iii)「$|x|<1$ かつ $|y|<1$」は，「$xy+1>x+y$」であるための ウ ．

(iv)「$y \leqq x^2$」は，「$y \leqq x$」であるための エ ．

(v)「$x^2+y^2<2$」は，「$|x|+|y|<2$」であるための オ ．

1. 必要十分条件である
2. 必要条件であるが，十分条件ではない
3. 十分条件であるが，必要条件ではない
4. 必要条件でも十分条件でもない

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) n は0または正の整数とする．二項定理を用いて

$${}_n\mathrm{C}_0+3\cdot{}_n\mathrm{C}_1+3^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+3^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=4^n$$ を示せ．

(2) n を自然数とする．$3^n+5^n=8^n$ となるのは $n=1$ のときだけであることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　a，b，c，x，y，z はすべて正の実数である．

(1)　不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときはどのようなときか．

(2)　$a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

[2]　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$　$(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$ で定義する．このとき，すべての正の整数 n に対して不等式 $a_n<\left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　論証，証明

［1］ x，y は実数とする．次の空欄に当てはまるものを，下の①～④から選べ．

(1)「$x^2+y^2\leqq 1$」は「$-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq y\leqq 1$」であるための **ア**

(2)「$x+y\geqq 2$」は「$x\geqq 2$ または $y\geqq 2$」であるための **イ**

① 必要十分条件である　② 十分条件だが必要条件ではない

③ 必要条件だが十分条件ではない　④ 必要条件でも十分条件でもない

［2］ $13=12+1$ であることを利用して，13^{13} を 12^2 で割ったときの余りを求めると **ウエ** である．

［3］ a，b，c，x，y，z を実数とするとき，

不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ．この不等式の等号が成立するときを考えることにより，$x+y+z=1$ のときの $x^2+y^2+z^2$ の最小値は

$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であることがわかる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　論証，証明

1　x，y が実数であるとき，次の文中の空欄に当てはまるものを，下の1，2，3，4から1つ選べ．

(i)「$x+y>0$ かつ $xy>0$」は，「$x>0$ かつ $y>0$」であるための ア ．

(ii)「$x+y>2$ または $x+y<-2$」は，「$x>1$ かつ $y>1$」であるための イ ．

(iii)「$|x|<1$ かつ $|y|<1$」は，「$xy+1>x+y$」であるための ウ ．

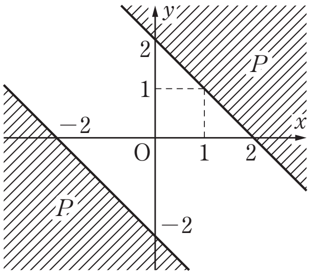
(iv)「$y \leqq x^2$」は，「$y \leqq x$」であるための エ ．

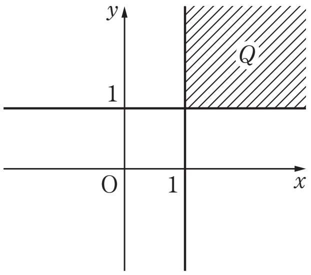
(v)「$x^2+y^2<2$」は，「$|x|+|y|<2$」であるための オ ．

1．必要十分条件である
2．必要条件であるが，十分条件ではない
3．十分条件であるが，必要条件ではない
4．必要条件でも十分条件でもない

(i) $xy>0$ のとき $x>0$ かつ $y>0$　　または　$x<0$ かつ $y<0$
よって「$xy>0$ かつ $x+y>0$」は「$x>0$ かつ $y>0$」と同値である．
したがって　**1**（必要十分条件である）

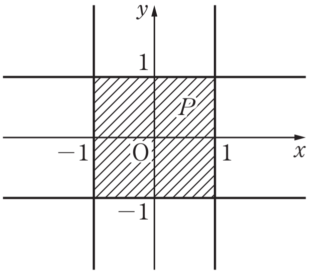
(ii) $x+y>2$ または $x+y<-2$　⇔　$y>-x+2$ または $y<-x-2$
よって，$P=\{(x,\ y)\,|\,x+y>2$ または $x+y<-2\}$，$Q=\{(x,\ y)\,|\,x>1,\ y>1\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界含まず）

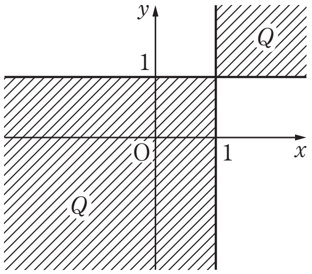




したがって　$Q \subset P$ より　**2**（必要条件であるが，十分条件ではない）

(iii) $xy+1>x+y$　より　$xy-x-y+1>0$　　$(x-1)(y-1)>0$
　よって　$x>1,\ y>1$ または $x<1,\ y<1$
したがって，$P=\{(x,\ y)\,|\,|x|<1,\ |y|<1\}$，$Q=\{(x,\ y)\,|\,xy+1>x+y\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界含まず）

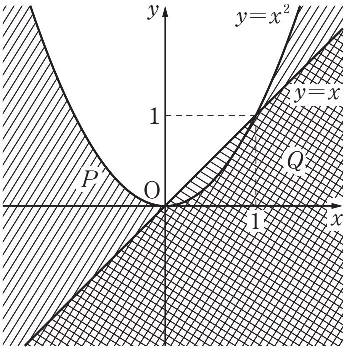




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

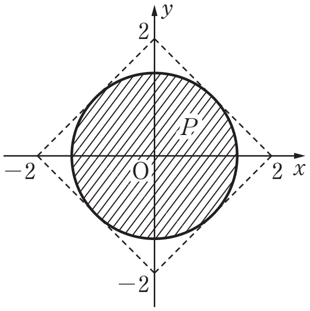
したがって　$P \subset Q$ より　**3**　（十分条件であるが，必要条件ではない）

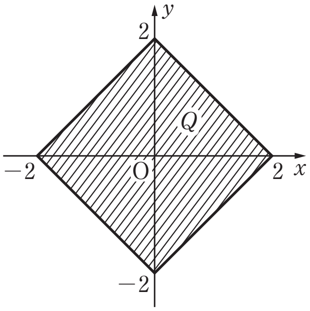
(iv)　$P=\{(x,\ y)\,|\,y \leqq x^2\}$，$Q=\{(x,\ y)\,|\,y \leqq x\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界を含む）



したがって　**4**（必要条件でも十分条件でもない）

(v)　$P=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<2\}$，$Q=\{(x,\ y)\,|\,|x|+|y|<2\}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の領域は下図斜線部分（境界含まず）





したがって　$P \subset Q$ より　**3**（十分条件であるが，必要条件ではない）

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) n は0または正の整数とする．二項定理を用いて

$${}_nC_0+3\cdot{}_nC_1+3^2\cdot{}_nC_2+\cdots\cdots+3^n\cdot{}_nC_n=4^n$$ を示せ．

(2) n を自然数とする．$3^n+5^n=8^n$ となるのは $n=1$ のときだけであることを示せ．

(1) $4^n=(1+3)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot3+{}_nC_2\cdot3^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot3^n$

$={}_nC_0+3\cdot{}_nC_1+3^2\cdot{}_nC_2+\cdots\cdots+3^n\cdot{}_nC_n$　　よって示された．

(2) $3^n+5^n=8^n$　……①　について

$n=1$ のとき　(左辺)$=3^1+5^1=8$　　(右辺)$=8^1=8$　より　①は成立

$n\geqq2$ のとき

$$8^n=(3+5)^n={}_nC_0\cdot3^n+{}_nC_1\cdot3^{n-1}\cdot5+{}_nC_2\cdot3^{n-2}\cdot5^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}\cdot3\cdot5^{n-1}+{}_nC_n\cdot5^n$$

$$=3^n+5^n+({}_nC_1\cdot3^{n-1}\cdot5+{}_nC_2\cdot3^{n-2}\cdot5^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}\cdot3\cdot5^{n-1})$$

$$>3^n+5^n$$

よって $n\geqq2$ のときは①は成立しない．

したがって，①が成立するのは $n=1$ のときだけである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　a，b，c，x，y，z はすべて正の実数である．

(1)　不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つときはどのようなときか．

(2)　$a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=(a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2)$

$\quad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2caxz+a^2z^2)$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0$

よって　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

等号成立は　$\boldsymbol{ay=bx}$ **かつ** $\boldsymbol{bz=cy}$ **かつ** $\boldsymbol{cx=az}$

a，b，c，x，y，z はすべて正より　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき

(2)　$a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$ のとき

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ が成立する．

つまり(1)より　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ が成立する．

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと $x=ka$，$y=kb$，$z=kc$

このとき　$x^2+y^2+z^2=36$　より　$k^2(a^2+b^2+c^2)=36$

$a^2+b^2+c^2=25$ より　$25k^2=36$　　$k>0$ より　$k=\dfrac{6}{5}$

したがって　$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=\dfrac{a+b+c}{k(a+b+c)}=\dfrac{1}{k}=\boldsymbol{\dfrac{5}{6}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [2]　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$　($n=3$，4，5，……) で定義する．このとき，すべての正の整数 n に対して不等式 $a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$　……①　について

[i]　$n=1$，$n=2$ のとき

$a_1=1<\frac{7}{4}$，$a_2=1<\left(\frac{7}{4}\right)^2$　より①は成立する．

[ii]　$n=k$，$k+1$ のとき①が成り立つとする．

$a_k<\left(\frac{7}{4}\right)^k$，$a_{k+1}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$

$a_{k+2}=a_k+a_{k+1}<\left(\frac{7}{4}\right)^k+\left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}=\left(\frac{7}{4}\right)^k\left(1+\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{4}$

ここで，$\left(\frac{7}{4}\right)^{k+2}-\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{4}=\left(\frac{7}{4}\right)^k\left(\frac{49}{16}-\frac{44}{16}\right)>0$　より

$\left(\frac{7}{4}\right)^k\cdot\frac{11}{4}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+2}$　　つまり　$a_{k+2}<\left(\frac{7}{4}\right)^{k+2}$

より①は $n=k+2$ のときも成立する．

[i]，[ii]より　すべての自然数 n について①が成立する．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　論証，証明

［1］　x，y は実数とする．次の空欄に当てはまるものを，下の①～④から選べ．

(1)「$x^2+y^2 \leqq 1$」は「$-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq y \leqq 1$」であるための［ア］

(2)「$x+y \geqq 2$」は「$x \geqq 2$ または $y \geqq 2$」であるための［イ］

①　必要十分条件である　　②　十分条件だが必要条件ではない

③　必要条件だが十分条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

［2］　$13=12+1$ であることを利用して，13^{13} を 12^2 で割ったときの余りを求めると［ウエ］である．

［3］　a，b，c，x，y，z を実数とするとき，

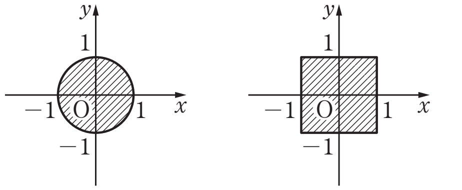
不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つ．この不等式の等号が成立するときを考えることにより，$x+y+z=1$ のときの $x^2+y^2+z^2$ の最小値は

$\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$ であることがわかる．

解答例

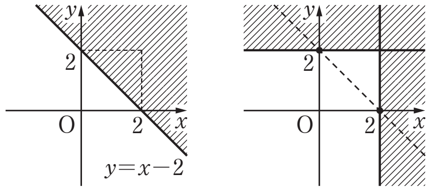
［1］　下図より　(1)　②　　　(2)　④

(1)



$x^2+y^2 \leqq 1$　　$-1 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq y \leqq 1$

(2)



$x+y \geqq 2$　　$x \geqq 2$ または $y \geqq 2$

［2］　$13^{13}=(12+1)^{13}=12^{13}+{}_{13}C_1\cdot 12^{12}+{}_{13}C_2\cdot 12^{11}+\cdots\cdots+{}_{13}C_{11}\cdot 12^2+{}_{13}C_{12}\cdot 12+1$

$=12^2(12^{11}+{}_{13}C_1\cdot 12^{10}+{}_{13}C_2\cdot 12^9+\cdots\cdots+{}_{13}C_{11})+13\cdot 12+1$

$=144N+157=144(N+1)+13$　（N は正の整数）

よって 13^{13} を $12^2=144$ で割ったときの余りは　**13**

［3］　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0$

この等号が成立するのは　$ay-bx=0$，$bz-cy=0$，$cx-az=0$

つまり　$a:b:c=x:y:z$ のとき

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ において，$a=b=c=1$ とすると

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$　つまり　$3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$

等号が成立するのは　$x:y:z=1:1:1$　つまり　$x=y=z$ のとき

よって $x+y+z=1$ のとき　$x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{1}{3}\cdot 1^2=\dfrac{1}{3}$

等号が成立するのは　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$ のとき　　よって $x^2+y^2+z^2$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。